

## Cap1 –Coduri detectoare si corectoare de erori – probleme

### CRC

**Exemplul 6.** Mesajul binar  $M$ : 1110101 se transmite după codificarea prin polinomul de generare  $G(x) = x^3 + x + 1$ . Care este reprezentarea binară a mesajului transmis?

*Rezolvarea.*

Mesajului binar  $M$  : 1110101 se asociază polinomul  $M(x)$ :

- $M(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1$ ;
- Se calculează  $M'(x) = M(x) \cdot x^3$  ; deoarece gradul lui  $G(x)$  este 3;
- $M'(x) = x^9 + x^8 + x^7 + x^5 + x^3$
- Se împarte  $M'(x)$  la  $G(x)$ :

$$\frac{M'(x)}{G(x)} = C(x) \oplus \frac{R(x)}{G(x)}$$

$$\begin{array}{r}
 x^9 + x^8 + x^7 + x^5 + x^3 \quad |x^3 + x + 1 \\
 \phantom{x^9 + x^8 + x^7 + x^5 + x^3} \quad |----- \\
 x^9 + x^7 + x^6 \phantom{+ x^5 + x^3} \quad |x^6 + x^5 + 1 \\
 \hline
 / \quad x^8 + x^6 + x^5 + x^3 \\
 \phantom{/} \quad x^8 + x^6 + x^5 \\
 \hline
 / \quad / \quad / \quad x^3 \\
 \phantom{/} \phantom{/} \phantom{/} \quad x^3 + x + 1 \\
 \hline
 / \quad x + 1
 \end{array}$$

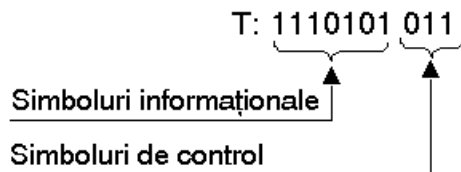
(Adunarea și scăderea în modulo 2 sunt echivalente)

$$R(x) = x + 1$$

Se obține polinomul  $T(x) = M'(x) \oplus R(x)$

$$T(x) = x^9 + x^8 + x^7 + x^5 + x^3 + x + 1$$

Coefficienții acestui polinom reprezintă mesajul ce se va transmite:



**Exemplul 7.** Știind că mesajul recepționat  $T' : 1010101011$  a fost transmis după codificarea prin polinomul de generare  $G(x) = x^3 + x + 1$ , să se verifice corectitudinea lui.

**Rezolvarea.** Mesajului recepționat  $T'$  se asociază polinomul:

$$T'(x) = x^9 + x^7 + x^5 + x^3 + x + 1.$$

Prin aplicarea criteriului de detecție a erorilor se obține:

$$\frac{T'(x)}{G(x)} = \frac{T(x) \oplus E(x)}{G(x)} = C(x) \oplus \frac{E(x)}{G(x)}$$

$$\begin{array}{r}
 x^9 + x^7 + x^5 + x^3 + x + 1 \quad | \quad x^3 + x + 1 \\
 \phantom{x^9 + x^7 + x^5 + x^3 + x + 1} \quad | \quad \text{-----} \\
 x^9 + x^7 + x^6 \quad | \quad x^6 + x^3 + x^2 + x + 1 \\
 \text{-----} \\
 / \quad / \quad x^6 + x^5 + x^3 + x + 1 \\
 \phantom{/ \quad / \quad} x^6 + x^4 + x^3 \\
 \text{-----} \\
 / \quad x^5 + x^4 + x + 1 \\
 \phantom{/ \quad} x^5 + x^3 + x^2 \\
 \text{-----} \\
 / \quad x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\
 \phantom{/ \quad} x^4 + x^2 + x \\
 \text{-----} \\
 / \quad x^3 + 1 \\
 \phantom{/ \quad} x^3 + x + 1 \\
 \text{-----} \\
 / \quad / \quad x \quad /
 \end{array}$$

Așadar, mesajul recepționat este eronat deoarece  $E(x) \neq 0$ .

**Propuse CRC:**

**6.** Mesajul  $M: (101101101)_2$  se emite după codificarea cu polinomul de generare  $G(x) = x^4 + x^2 + x + 1$ . Care este reprezentarea binară a mesajului transmis?

**7.** Reprezentarea în sistemul binar a numărului zecimal 67 se va transmite după codificarea polinomială ciclică prin polinomul de generare  $G(x) = x^2 + x + 1$ . Care este mesajul binar transmis ?

**8.** Verificați corectitudinea mesajului  $(10100110101001)_2$  recepționat, știind că la emisie a fost codificat cu polinomul de generare  $G(x) = x^4 + x^2 + 1$ .

## HAMMING

**Exemplul 2.** Să se determine secvențele codului Hamming corespunzătoare cifrelor zecimale 7, 8 și 9 știind că în codificarea primară s-a folosit codul 8421. Este respectată condiția distanței minime?

**Rezolvarea.** Pentru calcularea cifrelor de control  $c_1, c_2, c_4$  din secvențele codului Hamming (tabelul 2.6) se utilizează relațiile obținute anterior.

**Tabelul 2.6.** Secvențele de cod

Cifra zecimală	Secvențele codului										
	8421				Hamming (calculate)						
	$a_3$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$c_1$	$c_2$	$a_3$	$c_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
7	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1

Deoarece codul Hamming detectează și corectează o singură eroare va fi necesar ca  $D_{\min} \geq 3$ . Vom calcula distanța minimă în raport cu secvențele codului Hamming obținute:

$$D(v_7, v_8) = (0 \oplus 1) + (0 \oplus 1) + (0 \oplus 1) + (1 \oplus 0) + (1 \oplus 0) + (1 \oplus 0) + (1 \oplus 0) = 7$$

$$D(v_7, v_9) = 3$$

$$D(v_8, v_9) = 4$$

Condiția distanței minime de cod este respectată,  $D_{\min} = 3$ .

**Exemplul 3.** Fie mesajul recepționat  $(1111000)_2$ .

a) Știind că reprezintă o secvență a codului Hamming, să se verifice corectitudinea lui. În caz de eroare, presupunând că o singură poziție este eronată, să se asigure corecția.

b) Cărei cifre zecimale îi corespunde mesajul corectat, dacă într-o primă codificare a fost folosit codul 8421.

**Rezolvarea.**

Apelând la relațiile:

$$\begin{cases} e_4 = c_4' \oplus a_5' \oplus a_6' \oplus a_7' \\ e_2 = c_2' \oplus a_3' \oplus a_6' \oplus a_7' \\ e_1 = c_1' \oplus a_3' \oplus a_5' \oplus a_7' \end{cases}$$

vom calcula  $(e_4, e_2, e_1)$  având:

$c_1$	$c_2$	$a_3$	$c_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
1	1	1	1	0	0	0

$$\begin{cases} e_4 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1 \\ e_2 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 0 \\ e_1 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 0 \end{cases}$$

Deoarece  $(e_4, e_2, e_1) \neq (0, 0, 0)$  - mesajul recepționat este eronat. Se poate face corecția dacă se presupune că o singură cifră binară a mesajului a fost modificată. Poziția cifrei eronate se obține prin decodificarea secvenței  $(e_4, e_2, e_1) = (100)_2 \Rightarrow (4)_{10} \Rightarrow$  cifra  $c_4$  devine 0.

Mesajul corect este 1110000  $\Rightarrow$  acesta corespunde cifrei zecimale 8. Valoarea cifrei transmise s-a obținut prin decodificarea cifrelor binare:  $a_3 a_5 a_6 a_7$ .

**Propuse Hamming:**

4. a) Determinați secvențele codului Hamming corespunzătoare cifrelor zecimale 0, 1, 2, 3 și 4 știind că în codificarea primară s-a utilizat:

- a<sub>1</sub>) codul 8421;
- a<sub>2</sub>) codul EXCES 3;
- a<sub>3</sub>) codul 2421;
- a<sub>4</sub>) codul Gray;
- a<sub>5</sub>) codul 4221.

b) Cunoscând că prin codul Hamming se asigură detecția și corecția unei singure erori, să se verifice dacă secvențele de cod obținute la punctul a) respectă condiția distanței minime.

5. Știind că mesajele recepționate:

- a)  $(1001111)_2$
- b)  $(1101111)_2$
- c)  $(0011111)_2$
- d)  $(0011011)_2$
- e)  $(1110000)_2$

reprezintă secvențe ale codului Hamming, să se verifice corectitudinea lor. Dacă este posibil să se asigure corecția. Căror cifre zecimale corespund mesajele corectate, dacă într-o primă codificare s-a folosit codul 8421?

## PARITATE INCRUCISATA

**Exemplul 4.** Știind că într-o transmisie de date se utilizează detectarea erorilor prin paritate încrucișată, care este blocul de informație atașat emisieii cifrelor zecimale de la 4 la 9, codificate primar cu ajutorul codului EXCES 3. O secvență este reprezentată prin codificarea unei singure cifre zecimale.

**Rezolvarea**

Cifra zecimală	Secvența	Informația transmisă	
		Simbolurile informaționale EXCES 3 $x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4$	Control linie
4	S <sub>1</sub>	0 1 1 1	1
5	S <sub>2</sub>	1 0 0 0	1
6	S <sub>3</sub>	1 0 0 1	0
7	S <sub>4</sub>	1 0 1 0	0
8	S <sub>5</sub>	1 0 1 1	1
9	S <sub>6</sub>	1 1 0 0	0
<b>Control coloană</b>		1 0 1 1	1

**Exemplul 5.** Cunoscând că a fost transmis un bloc de date în condițiile exemplului 4 și s-a recepționat:

0 1 1 0 1  
 1 0 0 0 1  
 1 0 0 1 1  
 1 0 1 0 0  
 1 0 1 1 1  
 1 1 0 0 0  
 1 0 1 1 1

Să se verifice corectitudinea recepției.

**Rezolvarea.**

	Informația recepționată		I <sub>i</sub> calculat
	$x'_1 \ x'_2 \ x'_3 \ x'_4$	I <sub>i</sub>	
S <sub>1</sub>	0 1 1 0	1	0
S <sub>2</sub>	1 0 0 0	1	1
S <sub>3</sub>	1 0 0 1	1	0
S <sub>4</sub>	1 0 1 0	0	0
S <sub>5</sub>	1 0 1 1	1	1
S <sub>6</sub>	1 1 0 0	0	0
C' <sub>j</sub>	1 0 1 1	1	1
<b>C<sub>j</sub> calculat</b>	<b>1 0 1 0</b>	<b>0</b>	

Avem: I<sub>1</sub> ≠ I<sub>1</sub> calculat și I<sub>3</sub> ≠ I<sub>3</sub> calculat;

C'<sub>4</sub> ≠ C<sub>4</sub> calculat și C'<sub>5</sub> ≠ C<sub>5</sub> calculat.

Erorile sunt în secvențele: S<sub>1</sub> și S<sub>3</sub> pe pozițiile x'<sub>4</sub> și I<sub>1</sub>.